

# Grandes déformations multi-domaines par une approche monolithique pour le calcul massivement parallèle

Fadi EL HADDAD<sup>1</sup>, Hugues DIGONNET<sup>2</sup>, Thierry COUPEZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Cemef, Mines Paristech, [fadi.el\\_haddad@mines-paristech.fr](mailto:fadi.el_haddad@mines-paristech.fr)

<sup>2</sup> Cemef, Mines Paristech, [hugues.digonnet@mines-paristech.fr](mailto:hugues.digonnet@mines-paristech.fr)

<sup>3</sup> Cemef, Mines Paristech, [thierry.coupez@mines-paristech.fr](mailto:thierry.coupez@mines-paristech.fr)

**Résumé** — Le développement d’une approche performante au niveau du calcul massivement parallèle, capable de simuler des applications complexes (multi domaine) est l’un des intérêts essentiels de l’industrie. Dans cet article, le sujet des grandes déformations est abordé tout en utilisant une approche eulérienne monolithique. Une méthode level set convective est utilisée afin de définir les différents domaines présents et leur évolution au cours du temps. Ainsi, un seul maillage est considéré sur lequel un ensemble d’équations est résolu dont les propriétés physiques sont gérées par des lois de mélange. Le maillage est adapté afin d’avoir une précision plus élevée au niveau du calcul. L’utilisation d’un maillage unique permet d’obtenir une très bonne performance parallèle de l’approche.

**Mots clés** — grande déformation, approche eulérienne monolithique, level set convective, loi de mélange, adaptation de maillage, calcul parallèle.

## 1 Introduction

Les procédés de mise en forme (forgeage, laminage, extrusion...) des matériaux revêtent une grande importance dans des nombreuses applications qui intéressent l’industrie actuelle. Néanmoins la prédiction de l’état finale des pièces restent très complexe dû à ses propriétés géométriques et métallurgiques précises. En conséquence, plusieurs essais expérimentaux sont souvent nécessaires afin d’obtenir une pièce finale convenable. Pour des raisons financières, et afin de minimiser le temps mis pour achever un essai expérimental les industries ont aujourd’hui recours aux logiciels qui permettent la modélisation de tels procédés.

Les premières contributions concernant la modélisation de la mise en forme ont vu le jour dans les années 70. La modélisation de ces procédés présente de nombreux défis ; en particulier le problème des grandes déformations multi-domaines. En effet, le contact entre solides déformables et outils rigides ou déformables entraîne l’apparition des nouvelles surfaces relativement important. D’où la nécessité de développer des outils numériques robustes capables de gérer le contact et le frottement entre les différents solides déformables et rigides en présence.

Ces premières approches étaient basées sur des formulations lagrangiennes [5],[7]. Néanmoins les problèmes qui se posent dans de telles formulations sont les interactions entre les différents domaines présents dans un cas multi-domaines. En effet, un des principaux problèmes rencontrés est lié aux algorithmes de recherche de contact et à leur parallélisation [5]. L’approche monolithique proposée repose principalement sur une description eulérienne et un maillage unique [6]. Le principe est de définir un volume de travail dans lequel les différents domaines sont immergés. En effet, dans le cadre eulérien, la description des frontières et des interfaces des domaines est décrite implicitement par des fonctions distances signées. La représentation des domaines est améliorée en utilisant un maillage hétérogène anisotrope. Le maillage ne sert donc plus à définir les domaines en présence mais seulement à résoudre les équations générales de la mécanique d’un unique domaine fortement hétérogène. Les hétérogénéités représentent justement les différents domaines. En terme de calcul parallèle, il est prévu que la technique du maillage unique permet d’obtenir facilement une très bonne scalabilité jusqu’à plusieurs centaines de processeurs.

Dans cet article, une bref description de l’approche monolithique est présentée ainsi que des applica-

tions concernant principalement le forgeage et une étude présentant la performance de l'approche vis à vis du calcul parallèle.

## 2 Approche Monolithique

### 2.1 Immersion de volume

La méthode d'immersion de volume s'avère indispensable pour décrire les différents domaines en question, elle consiste à définir une fonction distance signée dans le domaine de calcul dont l'isovaleur zéro représente l'interface du domaine que l'on cherche à décrire.

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} d(x, \Gamma_i) & x \in \Omega_i \\ 0 & x \in \Gamma_i \\ -d(x, \Gamma_i) & x \notin \Omega_i \end{cases} \quad (1)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un point du domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\Omega_i$  représente le sous-domaine immergé dans  $\Omega$ . Chaque fonction distance signée sera associée à un sous domaine  $\Omega_i(t)$  qui n'est pas fixe et dépend du temps. Donc les différents domaines  $\Omega_i(t)$  sont définis d'une façon à recouvrir  $\Omega = \cup \Omega_i(t)$ .

En fait, la seule information utile obtenue à partir de la fonction distance signée est celle des isovaleurs proches de l'isovaleur zéro. D'où l'idée de tronquer la fonction distance signée par un filtre tangente hyperbolique telle que les deux fonctions coïncident au voisinage de zéro :

$$\hat{\alpha} = E.tanh\left(\frac{\alpha}{E}\right)$$

où  $E$  est une épaisseur donnée.

### 2.2 Equations

Ce paragraphe est consacré à l'écriture de la formulation monolithique du système mécanique à résoudre. Soit  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) le domaine de calcul ; le modèle mécanique est gouverné par les équations fondamentales de la mécanique :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma_i &= \rho_i g \\ \nabla \cdot v &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\rho_i$  représente la densité et  $\sigma_i$  le tenseur de contrainte du sous-domaine  $\Omega_i$ . Il est défini sous la forme suivante :  $\sigma_a = 2\eta_a \varepsilon(v) - p\mathbb{I}$  dans l'air,  $\sigma_s = 2\eta_s \varepsilon(v) - p\mathbb{I}$  dans les corps rigides et  $\sigma_d = 2\eta_d (\sqrt{3}\varepsilon(v))^{m-1} - p\mathbb{I}$  dans les corps déformables.  $\eta_a$ ,  $\eta_s$  et  $\eta_d$  représentent respectivement la viscosité de l'air ; la consistance des corps rigides et la consistance des corps déformables.  $m$  est la sensibilité à la vitesse de déformation. En posant  $\Omega = \cup \Omega_i(t)$ , le système monolithique est obtenu en additionnant les trois systèmes précédents :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma &= \rho g \\ \nabla \cdot v &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$\sigma$  et  $\rho$  sont définis d'une manière globale sur tout le domaine de calcul  $\Omega$ . Ils sont calculés à partir des lois de mélange pour respecter les propriétés physiques de chaque sous domaine.

### 2.3 Loi de mélange

Après la définition de tous les sous-domaines géométriquement avec une fonction de distance signée, les propriétés physiques sont déterminées sur tout le domain  $\Omega$  en fonction des Level set relatives à chaque sous domain immergé. Une loi de mélange est utilisée pour bien déterminer les propriétés physiques d'une maille traversée par une des fonctions distances signées. Afin d'établir cette loi de mélange, il est nécessaire d'introduire la fonction d' Heaviside qui va jouer le rôle d'une fonction densité :

$$H(\hat{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\alpha} \geq 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\alpha} < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Pour éviter le problème de discontinuité, la fonction de Heaviside présenté ci- dessus doit être lissée sur une épaisseur  $\varepsilon$  donnée de part et d'autre de l'interface du domaine immergé, comme indiqué ci-dessous :

$$H_\varepsilon(\hat{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\alpha} > \varepsilon \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{\hat{\alpha}}{\varepsilon}) & \text{si } -\varepsilon < \hat{\alpha} < \varepsilon \\ 0 & \text{si } \hat{\alpha} < -\varepsilon \end{cases} \quad (5)$$

En outre de la définition des propriétés physiques des différents domaines immergés ; les lois de mélange gèrent les différents types de contact. Une loi de mélange linéaire en  $H_\varepsilon(\hat{\alpha})$  à tendance à se rapprocher d'un contact collant :

$$\eta(H_\varepsilon) = \sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta_0) \times H_\varepsilon(\hat{\alpha}_i) + \eta_0 \quad (6)$$

où  $\eta_i$  est la consistance du domaine représenté par  $\hat{\alpha}_i$  et  $\eta_0$  la viscosité de l'air. Tandis que la loi de mélange quadratique gère un autre type de contact proche du contact glissants. Elle consiste à ajouter une faible viscosité du lubrifiant  $\eta_L$  entre les différents domaines en contact :

$$\eta(H_\varepsilon) = \left[ -2(\eta_L - \eta_0) + \sqrt{(\eta_L - \eta_0) \cdot (\eta_L - \eta_1)} + (\eta_1 - \eta_0) \right] \times H_\varepsilon^2 + \left[ 2(\eta_L - \eta_0) - \sqrt{(\eta_L - \eta_0) \cdot (\eta_L - \eta_1)} \right] \times H_\varepsilon + \eta_0$$

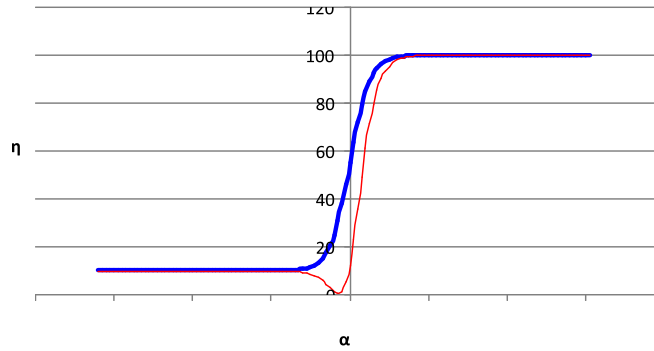


Fig. 1 – Comparaison entre la loi de mélange linéaire (en bleu) et la loi de mélange quadratique (en rouge) en fonction de la fonction distance signée.

## 2.4 Transport des level Set

Les différents sous domaines présents dans le domaine de calcul sont définis implicitement à partir d'une fonction distance signée (1). D'où la nécessité d'une méthode implicite pour suivre l'évolution des interfaces au cours du temps. Le mouvement de l'interface est prédit par la résolution de l'équation de transport suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + v \nabla \cdot \alpha &= 0 \\ \alpha(t=0, x) &= \alpha_0(x) \end{aligned} \quad (7)$$

Or, l'équation de transport ne garde pas la propriété de la fonction distance ; une étape de réinitialisation est nécessaire afin de respecter la propriété suivante :

$$|\nabla \alpha| = 1$$

Au lieu de résoudre une équation de Hamilton-Jacobi afin de réinitialiser les isovaleurs. Une méthode level set convective est introduite permettant l'advection des isovaleurs tout en les réinitialisant à la fois [8].

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (v + \lambda U) \nabla \cdot \alpha &= \lambda s \\ \alpha(t = 0, x) &= \alpha_0(x)\end{aligned}\quad (8)$$

En résolvant l'équation (8), les isovaleurs sont convectées avec une vitesse  $(v + \lambda U)$ .  $\lambda U$  est la vitesse de réinitialisation provenant de l'équation de Hamilton-Jacobi. Elle est égale à  $\frac{h}{\Delta t} \times s(\alpha) \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|}$ .  $s$  ; la fonction signe, vaut 1 si  $\alpha > 0$ , zéro si  $\alpha = 0$  et -1 ailleurs. Enfin, et après un simple changement de variable en remplaçant  $\alpha$  par  $\hat{\alpha}$ , la résolution du problème de transport est équivalent à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} + (v + \lambda U) \nabla \cdot \hat{\alpha} &= \lambda s g(\hat{\alpha}) \\ \hat{\alpha}(t = 0, x) &= \hat{\alpha}_0(x)\end{aligned}\quad (9)$$

où  $g(\hat{\alpha}) = 1 - \tanh^2(\hat{\alpha})$ .

## 2.5 Maillage anisotrope

Toute seule, la méthode de level set présentée ci-dessus, ne permet pas de résoudre de manière efficace les problèmes liés au capture d'interface ; elle dépend de la taille autour de l'interface des domaines immergés. D'où le recours à la technique d'adaptation de maillage anisotrope est recommandée [1],[9]. Cette technique permet de capturer la discontinuité au niveau de l'interface des différents domaines et l'évolution précise de ces interfaces au cours du temps. La technique d'adaptation utilisée est basée sur la variation du gradient des fonctions level set. L'erreur est estimé par :

$$e_{ij} = |G^{ij} X^{ij}|$$

où  $X^{ij}$  est le vecteur du nœud  $i$  au nœud  $j$ .  $G^{ij}$  est la variation du gradient de la fonction évalué au nœud  $j$  et le nœud  $i$ .

Après l'estimation de l'erreur, l'idée est de calculer la métrique en chaque nœud du maillage tel que les longueurs des arêtes connectées à ce nœud soient proches de l'unité. La construction de la métrique proposée dans [10] s'appuie sur le tenseur de distribution :

$$\mathbb{X}^i = \frac{1}{|\Gamma(i)|} \left( \sum_{j \in \Gamma(i)} X^{ij} \otimes X^{ij} \right) \quad (10)$$

où  $\Gamma(i)$  est le cardinal des nœuds voisins du nœud  $i$ . Le tenseur  $\mathbb{X}^i$  définis ci-dessus est une matrice symétrique positive quand il y a au moins  $d$  (dimension) vecteurs d'arêtes non alignés. Enfin la métrique est donnée par :

$$\begin{aligned}M^i &= \frac{1}{d} \left( \sum_{j \in \Gamma(i)} s_{ij}^2 X^{ij} \otimes X^{ij} \right)^{-1} \\ s_{ij} &= \left( \frac{\lambda}{e_{ij}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \lambda = \left( \frac{\left( \sum_i \sum_{j \in \Gamma(i)} e_{ij}^{\frac{p}{p+2}} \right)}{A} \right)^{\frac{p+2}{p}}\end{aligned}\quad (11)$$

( $p \in [1, d]$  ,  $p$  est la solution de  $n_{ij} = s_{ij}^{-p}$  et  $n_{ij}$  est le nombre d'arêtes demandés)

### 3 Calcul Parallèle

En terme de calcul parallèle, il est prévu que la technique d'un maillage unique, utilisée dans une approche monolithique, permet d'obtenir facilement une très bonne scalabilité jusqu'à plusieurs centaines de processeurs. En effet, l'utilisation d'un maillage unique évite le recours aux algorithmes de recherche du contact et leur parallélisation difficile. Toutes les interactions sont locales et l'efficacité du parallélisme ne dépend que de la partition d'un seul maillage. En fait, le principal critère pour juger la parallélisation d'un algorithme est "l'Accélération" ("Speed Up"). L'accélération réfère au gain de temps d'exécution d'un algorithme parallèle par rapport à un algorithme séquentiel, elle est définie par la formule suivante :

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}$$

où  $p$  est le nombre de processeur,  $T_1$  représente le temps mis pour exécuter l'algorithme en séquentiel,  $T_p$  représente le temps mis pour exécuter l'algorithme en parallèle sur  $p$  processeurs.

## 4 Applications et Performances

### 4.1 Applications

#### 4.1.1 Tas plat

Cette simulation consiste à forger une pièce entre deux lopins. Le lopin supérieur se déplace avec une vitesse contante  $v_{imp} = 0.25 m/s$ ; alors le lopin inférieur reste fixe. L'imposition des degrés de liberté dans les lopins est faite dans un noyau. La pièce forgée suit la loi de Norton Hoff avec un coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation  $m = 1$ . La hauteur initiale de la pièce est de  $0.3 m$ . Un pas de temps adaptatif est mis en oeuvre afin de respecter bien la déformation de la pièce :

$$\Delta t_i = \frac{h_i}{h_0} \Delta t_0$$

où  $h_0$  est la hauteur initiale de la pièce,  $h_i$  est la hauteur de la pièce à l'incrément  $i$  et  $\Delta t_0$  est le pas de temps initial.

La consistance de la pièce est constante  $K = 10^6 Pa.s$ , la viscosité de l'air  $\eta_a = 0.1 Pa.s$  et la consistance des lopins  $\eta_s = 10^7 Pa.s$ . La densité des lopins et de la pièce est égale à 5000 et celle de l'air est à 1. La Figure (2) montre l'évolution de la pièce à forger.

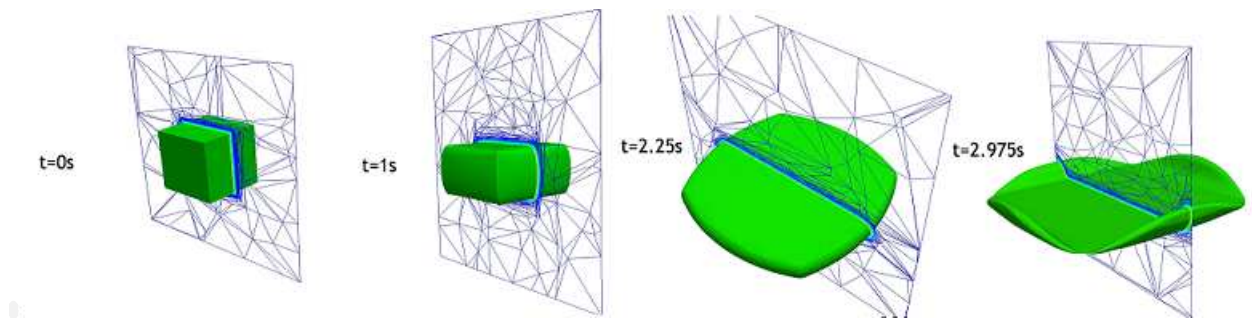


Fig. 2 – l'évolution du contour de la pièce forgée avec un maillage adaptatif anisotrope

#### 4.1.2 Frottement

La simulation présentée dans ce paragraphe est assez similaire à celle présenté dans le paragraphe 4.1, à l'exception qu'il s'agit d'un cas 2d. En plus, cette simulation est consacré à montrer la différence entre une loi de mélange linéaire (6) et une loi de mélange quadratique. Le domaine de calcul est un rectangle  $9 \times 1.5$ . La pièce à forger est un carée de  $0.5 \times 0.5$ . La figure (3) représente une comparaison des  $V_x$  (vitesse suivant l'axe des x) en utilisant les deux types des lois de mélanges. Une forte variation de vitesse autour de l'interface apparaît avec le mélange quadratique tandis qu'au centre du domaine la

variation de la vitesse reste quasiment constante. En revanche, l'utilisation d'une loi de mélange linéaire permet de voir la variation parabolique de la vitesse le long de la coupe. Les deux piques de part et d'autre de la courbe bleu représente les mailles contenant de l'air dû à la forme parabolique de la pièce.

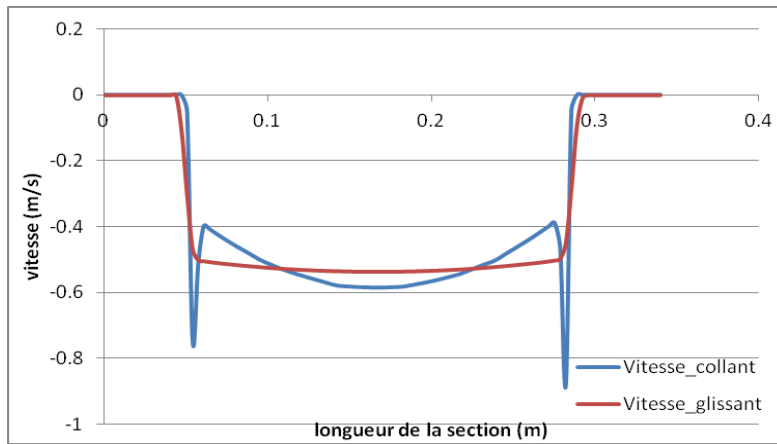


Fig. 3 – Comparaison des vitesses suivant la direction  $x$  d'un contact de type collant (bleu) et un contact de type glissant (rouge).

#### 4.1.3 Multi-domaine

Le domaine de calcul est de dimension  $100\text{ mm} \times 100\text{ mm} \times 51\text{ mm}$ . La géométrie déformable contient 10 parallélépipèdes. Les parallélépipèdes, de dimensions  $10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 5\text{ mm}$ , sont disposés afin d'avoir la géométrie de la figure (4). La consistance des 10 corps est égale à  $352\text{ MPa.s}$ . La vitesse imposée dans l'outil supérieur est égale à  $10\text{ mm/s}$  tandis que l'outil inférieur reste fixe. Chaque parallélépipède est représenté par une fonction level set. Le maillage a été adapté autour de ces dix levels set ; il contient 147501 nœuds et 80234 éléments. La figure (4) montre une vue de dessus des contours après écrasement jusqu'à 80% de la hauteur initiale.

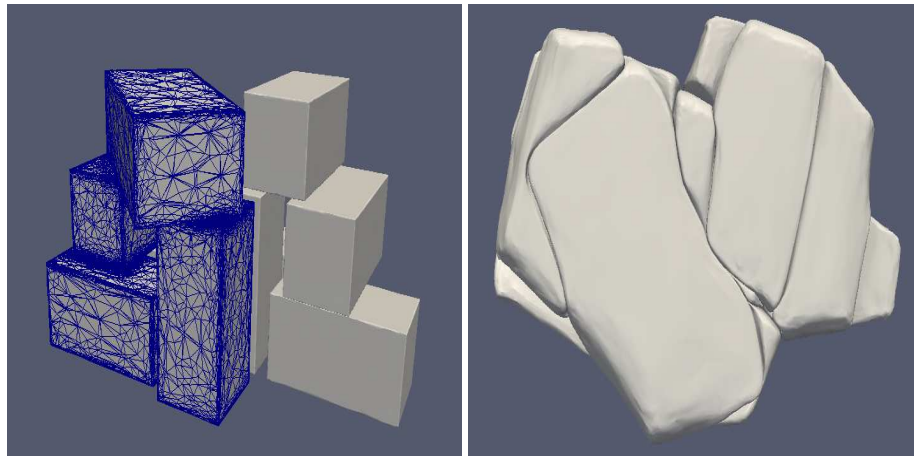


Fig. 4 – Géométrie initiale contenant 10 parallélépipèdes (à gauche), vue de dessus des contours après écrasement jusqu'à 80% (à droite)

## 4.2 Performances

Le but des cas de test suivants est de prouver l'efficacité de la parallélisation utilisée dans "CimLib" [3]. Une étude a été réalisée afin de montrer la capacité de la librairie "CimLib" de gérer des calculs massivement parallèles [4]. Théoriquement, le "Speed Up" est linéaire lorsque  $S_p = p$ . Autrement dit, lors de l'exécution d'un algorithme utilisant  $p$  processeurs, le temps de calcul parallèle doit être égal au temps séquentiel divisé par  $p$ . Deux simulations 3D tas plats sont analysés. Dans les deux simulations un maillage homogène et isotrope est utilisée. Le procédé de forgeage a été arrêté lorsque la pièce forgée

atteint une déformation de 10% de sa hauteur initiale. Le premier maillage contient 65017 nœuds, 377552 éléments et une taille de maille  $h = 1.25\text{ mm}$ . Le second maillage, contenant 491 055 nœuds 2 879 257 éléments, est obtenu en divisant la taille de maille du premier maillage par 2. Les calculs sont effectués en utilisant des processeurs “AMD Opteron<sup>TM</sup> 6134”. Un nœud de calcul est formé de deux processeurs contenant 8 cœurs chacun.

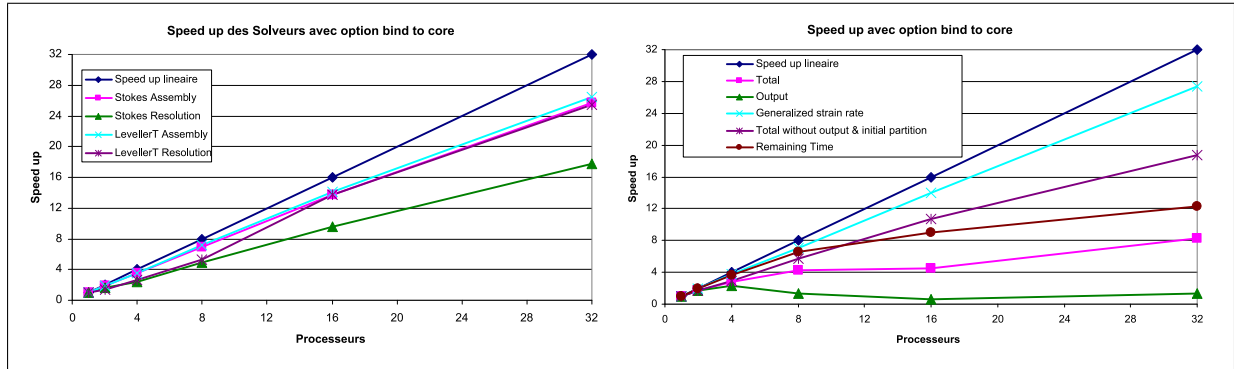


Fig. 5 – Speed up obtenus des différentes parties du programme avec un maillage de 65017 nœuds, jusqu’à 32 processeurs

Les calculs ont été lancés en local sur les nœuds. L’option “*bind to core*”, disponible dans la version 1.4.3 de MPI, sert à attacher un processus MPI à un cœurs durant toute l’exécution du programme. Cette option est indispensable pour obtenir des bonnes performances au niveau du parallélisme. Les figures 5 et 6 montrent les “Speed up” obtenus en fonction des nombres de cœurs. Au niveau de l’assemblage et de la résolution, une légère perte d’efficacité est présente entre 1 et 8 cœurs due à une utilisation partielle du CPU pour un petit nombre de cœur. En revanche, au delà de 8 cœurs l’accélération est très proche de l’idéal. En plus, en retranchant le temps mis à écrire les résultats et à réaliser le partitionnement initial du maillage, le speed up globale est très proche de celui de la résolution de Stokes.

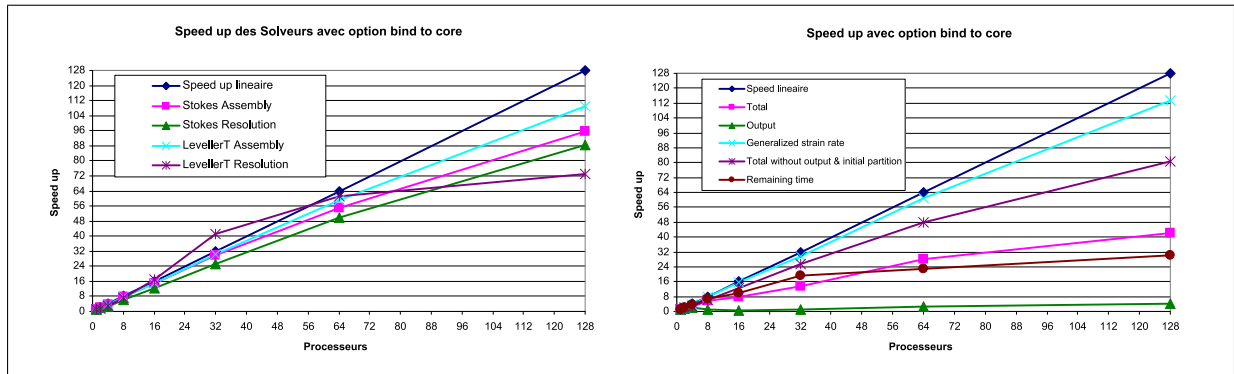


Fig. 6 – Speed up obtenus des différentes parties du programme avec un maillage de 491055 nœuds, jusqu’à 128 processeurs

## 5 Conclusions

Dans cet article, le problème des grandes déformations multi-domaine a été abordé en utilisant une approche eulérienne monolithique. Le modèle mécanique est décrit par un seul système d’équation défini sur un domaine unique (i.e. maillage unique) englobant les différents domaines présents. Les propriétés physiques sont définies sur tout le domaine moyennant différentes lois de mélange. En plus, la déformation de ces domaines immergés et le suivi de leur évolution au cours du temps sont calculés par une méthode level set convective. Une meilleure précision est obtenue en utilisant un maillage adapté anisotrope en utilisant un estimateur d’erreur basé sur la variation du gradient. Afin d’illustrer la capacité et l’efficacité de cette approche, plusieurs applications ont été présentées : l’écrasement d’un seul corps déformable entre deux outils, puis une simulation en 2d est faite afin de montrer les résultats en utilisant

deux lois de mélange différentes, ensuite un cas mutli-domain contenant 10 parallélipèdes a été écraser jusqu'à 80%. Enfin, La validité de l'approche et son efficacité au niveau du calcul parallèle ont été démontrées.

## Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier tous les acteurs de ce projet : Transvalor et Cemef - mines paristech.

## Références

- [1] C. Gruau, *3D tetrahedral, unstructured and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and multidomain metric*. Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, 194(48) :4951-4976,2005.
- [2] G. Surdon, J-L Chenot *Finite element calculations of three-dimensional hot forging*. International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM'86, Mattisson K et al (eds). A.Balkema : Rotterdam, 1986 ; 287-292.
- [3] H. Dignonnet, T Coupez *Object-oriented programming for 'fast-and-easy' developpement of parallel applications in forming processes simulation*. In second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Massachusset Institute, Bathe KJ (ed.). Elsevier : Amesterdam, 2003 ; 1922-1924
- [4] H. Dignonnet, *Repartitionnement dynamique, mailleur parallèle et leurs applications à la simulation numérique en mise en forme des matériaux*. Thèse Ecole Des Mines De Paris, 2001.
- [5] J. Barboza, *Traitement du contact entre corps déformables et calcul parallèle pour la simulation 3D du forgeage multicorps*. Thèse Ecole Des Mines De Paris, 2004.
- [6] J. Bruchon, H. Dignonnet, T. Coupez *Using a signed distance function for the simulation of metal forming processes : Formulation of the contact condition and mesh adaptation. From a Lagrangian approach to an Eulerian approach*, Int. J. Numer. Meth. Engng, Wiley, 78 :980-1008, 2008.
- [7] L. Fourment, JL Chenot, K Mocellin. *Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1999 ; 46(9) :1435-1462.
- [8] L. Ville, L.Silva, T. Coupez. *Convected Level set method for the numerical simulation of fluid buckling*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2010.
- [9] T. Coupez. *Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale*, Revue européenne des éléments finis, 9(4)(2000) 403-423.
- [10] T. Coupez. *Metric construction by length distribution tensor and edge based error for anisotropic adaptive meshing*, Journal of Computational Physics, elsevier, 2391-2405, 2011.